Číselné soustavy -

Napsal/a: Žirafka

Datum zveřejnění: : 17. 10. 2008 v 19:00

Dnešní povídání začnu několika jednoduchými rovnicemi:

11110011 = 243
10101010 = 170
9 = 11
29 = 35
FF = 11111111

Věřte nevěřte, všechny jsou v pořádku a dávají smysl. Já vím, že to tak nevypadá, ale je to tak.

Jenže v zápisu je přeci jenom drobná chyba. Mělo by to být takto:

$11110011_{(2)} = 243_{(10)}$
$10101010_{(2)} = 170_{(10)}$
$9_{(10)} = 11_{(8)}$
$29_{(10)} = 35_{(8)}$
$FF_{(16)} = 11111111_{(2)}$

Takto je již vše v pořádku. Jednotlivá čísla jsou totiž napsaná v různých číselných soustavách. Těch existuje nekonečné množství, ačkoli se jich používá relativně málo. Lidé jsou zvyklí používat soustavu desítkovou. Počítače a logické obvody používají převážně soustavu dvojkovou. Soustava šestnáctková je velice často používána při programování, protože se jí dají popsat dvojková, binární, čísla velice krátce. Osmičková soustava se používala k obdobnému účelu v pradávných dobách začátků počítačové techniky, dnes se již téměř nepoužívá.

Pro další počítání je důležité si uvědomit, že každé číslo jde rozepsat jako násobky základu číselné soustavy. Pro soustavu desítkovou to je číslo deset, pro osmičkovou je do číslo osm a tak dále.

Například takto:

$1234_{(10)} = 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 = 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4 \times 1$

$10101010_{(2)} = 1x2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

$153_{(8)} = 1 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 3 \times 8^0$

Teoretické základy tedy již máme a proto se můžeme pustit do vlastních převodů. Na první pohled to vypadá hodně složitě, ale ve skutečnosti je to jednoduché. Sčítat a odečítat by měl umět každý. A násobit také, kdo neumí, může si vzít na pomoc kalkulačku. Pro převody větších čísel je rozumné použít nějaký vhodný program, protože pak člověk neudělá chybu. Přesto je dobré umět si číslo převést bez těchto pomůcek. Člověk tím získá odhad velikosti daného čísla jen pohledem.

Je potřeba si udělat trošku jasno v názvosloví. Číslo a číslice totiž není to samé.

Číslice jsou znaky sloužící k zápisu čísel.
Číslo je zápis nějaké číselné hodnoty. Číslo obsahuje různý počet číslic.

Dvojková soustava – soustava binární

Dvojková soustava je běžně nazývána soustavou binární. Každý řád může mít buď hodnotu 1 nebo 0. Jiné možné nejsou. Číslice, které lze použít, jsou tedy 0,1. Dvojkové číslo 25 je tedy nesmysl. Číslice nejvíce vlevo, s největší hodnotou, se označuje jako MSB a číslice nejvíce vpravo se označuje jako LSB.

Převod: Dvojková -> Desítková

$10101010_{(2)} = ?_{(10)}$

Převod dvojkového čísla na desítkové je velice jednoduchý. Dvojkové číslo rozepíšeme jako násobky mocnin čísla dvě. Potom tyto násobky sečteme a tím je převod hotový.

$10101010_{(2)} = 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 =$
$128 + 0 + 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0 = 170_{(10)}$

Převod: Desítková -> Dvojková

$29_{(10)} = ?_{(2)}$

Od desítkového čísla postupně odečítáme mocniny dvou. Odečítání se provádí v oboru celých kladných čísel. Nejprve musíme zjistit, která největší mocna dvou je menší než převáděné číslo.

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$

Začneme tedy odečítat číslo 16, protože 32 je větší než 29.

29 – 16 = 13

Mocninu 2^4 lze odečíst, proto si zapíšeme 1.

13 – 8 = 5

Opět je to možné, proto si opět zapíšeme 1. Zbývá 4.

5 – 4 = 1

Jelikož to opět jde, znovu píšeme 1. Zbývá 1.

1 - 2 = -1

Tento výpočet nelze v kladných číslech provést, proto si zapíšeme 0.
Stále ještě zbývá 1 a proto pokračujeme dále:

1 – 1 = 0

Jelikož výpočet provést lze, naposledy si zapíšeme 1.
A protože zbytek je nula, je převod u konce.

Čísla si zapíšeme vedle sebe a výsledek je, že $29_{(10)} = 11101_{(2)}$

Osmičková soustava – soustava oktalová

Osmičková soustava je běžně nazývána soustavou oktalovou. Každý řád může mít hodnotu od 0 do 7. Jiné možné nejsou. Číslice, které lze použít, jsou tedy 0,1,2,3,4,5,6,7. Osmičkové číslo 99 je tedy nesmysl.

Převod: Osmičková -> Desítková

$157_{(8)} = ?_{(10)}$

Jedná se o obdobu převodu čísla dvojkového. Osmičkové číslo se rozepíše na násobky mocnin osmi a pak se opět tyto násobky sečtou.

$159_{(8)} = 1 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 1 \times 64 + 5 \times 8 + 7 \times 1 = 64 + 40 + 7 = 111_{(10)}$

Převod Desítková -> Osmičková

$254_{(10)} = ?_{(8)}$

Postup je obdobný jako u převodu desítkového čísla na číslo dvojkové. Od desítkového čísla postupně odečítáme mocniny osmi. Odečítání se opět provádí v oboru celých kladných čísel. Na rozdíl od soustavy dvojkové se ale daná mocnina odečítá tak dlouho, dokud to jde.

Nejprve musíme zjistit, která největší mocna osmi je menší než převáděné číslo.

$8^0 = 1$
$8^1 = 8$
$8^2 = 64$
$8^3 = 512$

Začneme tedy odečítat číslo 64, protože 512 je větší než 254.

254 – 64 = 190
190 – 64 = 126
126 – 64 = 62

Mocninu 8^2 lze odečíst celkem třikrát, proto si zapíšeme 3.

62 – 8 = 54
54 – 8 = 46
46 – 8 = 38
38 – 8 = 30
30 – 8 = 22
22 – 8 = 14
14 – 8 = 6

Mocninu 8^1 lze odečíst celkem sedmkrát a tak si zapíšeme 7.

6 – 1 = 5
5 – 1 = 4
4 – 1 = 3
3 – 1 = 2
2 – 1 = 1
1 – 1 = 0

A konečně mocninu 8^0 lze odečíst šestkrát. Poslední číslice, kterou si zapíšeme je 6.

Číslice si zapíšeme vedle sebe a výsledek je, že $254_{(10)} = 376_{(8)}$.

Šestnáctková soustava – soustava hexadecimální

Šestnáctková soustava je běžně nazývána soustavou hexadecimální. Zatím co všechny předchozí soustavy používali číslice od 0 do 10, tak soustava šestnáctková potřebuje celkem šestnáct číslic. Takové číslice neexistují a proto se používají písmenka. Číslice, které lze použít, jsou tedy 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F. Přičemž A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15. Tato soustava patří mezi největší strašáky začátečníků, přestože je to opět jen jednoduché počítání.

Převod: Šestnáctková -> Desítková

$A0C_{(16)} = ?_{(10)}$

Jedná se opět o obdobu převodu čísla dvojkového. Šestnáctkové číslo se rozepíše na násobky mocnin šestnácti a pak se opět tyto násobky sečtou.

$A0C_{(16)} = 10x16^2 + 0 \times 16^1 + 12 \times 16^0 = 10 \times 256 + 0 \times 16 + 12 \times 1 = 2560 + 0 + 12 = 2572_{(10)}$

Převod Desítková -> Šestnáctková

$19021979_{(10)} = ?_{(16)}$

Postup je obdobný jako u převodu desítkového čísla na číslo osmičkové. Od desítkového čísla postupně odečítáme mocniny šestnácti. Odečítání se opět provádí v oboru celých kladných čísel a opět tak dlouho, dokud to jde.

Nejprve musíme zjistit, která největší mocna šestnácti je menší než převáděné číslo.

$16^0 = 1$
$16^1 = 16$
$16^2 = 256$
$16^3 = 4096$
$16^4 = 65536$
$16^5 = 1048576$
$16^6 = 16777216$
$16^7 = 268435456$

Začneme tedy odečítat číslo 16777216, protože 268435456 je větší než 19021979.

19021979 – 16777216 = 2244763

Mocninu 16^6 lze odečíst jenom jedenkrát a tak si zapíšeme 1.

2244763 – 1048576 = 1196187
1196187 – 1048576 = 147611

Mocninu 16^5 lze odečíst celkem dvakrát a tak si zapíšeme 2.

147611 – 65536 = 82075
82075 – 65536 = 16539

Mocninu 16^4 lze odečíst celkem dvakrát a tak si zapíšeme další 2.

16539 – 4096 = 12443
12443 – 4096 = 8347
8347 – 4096 = 4251
4251 – 4096 = 155

Mocninu 16^3 lze odečíst celkem čtyřikrát a tak si zapíšeme 4.

155 – 256 = nelze

Mocninu 16^2 lze odečíst nelze a tak si zapíšeme 0.

155 – 16 = 139
139 – 16 =123
123 – 16 =107
107 – 16 =91
91 – 16 = 75
75 – 16 = 59
59 – 16 = 43
43 – 16 = 27
27 – 16 = 11

Mocninu 16^1 lze odečíst celkem devětkrát a tak si zapíšeme 9.

11 – 1 = 10
10 – 1 = 9
9 – 1 = 8
8 – 1 = 7
7 – 1 = 6
6 – 1 = 5
5 – 1 = 4
4 – 1 = 3
3– 1 = 2
2 – 1 = 1
1 – 1 = 0

Mocninu 16^0 lze odečíst celkem jedenáctkrát a tak si poprvé zapíšeme písmenko a to B.

Číslice si zapíšeme vedle sebe a výsledek je, že $19021979_{(10)}$ = $122409B_{(16)}$.

A to je vlastně všechno, protože pro jiné soustavy je postup obdobný. Jen se použijí jiné číslice a jiné mocniny a násobky. Lze tedy počítat v soustavě stodvacetitrojkové, ale myslím si, že to je poněkud nepraktické. Ačkoli, čím větší je základ soustavy, tím kratší čísla vznikají. To je výhodné při velikých číslech. Značnou komplikací ale je, že taková soustava by potřebovala celkem sto dvacet tři různých znaků pro číslice a to není jednoduché si zapamatovat. O počítání nemluvě, zapamatujte si násobilku pro takové množství čísel :-). Právě potřeba velikého počtu znaků je limitující pro používání vyšších číselných soustav. Soustava šestnáctková je vlastně takové praktické maximum.

Existují i jiné postupy jak převést číslo z jedné soustavy do druhé, ale já mám nejraději tento, protože se tu jen sčítá a odčítá. Jiné postupy nutí člověka dělit a pak ještě psát číslice od zadu. Někomu to vyhovovat může, někomu (mně) ne.

Na úplný závěr se zmíním ještě o označování čísel v jednotlivých soustavách. Soustava se buď označí základem v indexu čísla a nebo takto:

Dvojková: b00110011
Osmičková: 375o
Šestnáctková: 0xDE34 nebo DE34H případně DE34h

Příště se podíváme na kódování čísel a znaků. Podíváme se, co to je BCD, ASCII, ATASCII a další kódy. No a také si řekneme, co to vlastně je kód, jak se používá a proč.

Nyní tedy již můžeme směle prohlásit že "Lidé se dělí do 10 skupin: Ti co binární soustavě rozumí a ti co ne." ;-)

Použitá a doporučená literatura:

Číslicová technika David Matoušek, BEN - technická literatura 2004, ISBN 80-7300-025-3

Rozeberte si PC Václav Šedý, BEN - technická literatura 2002, ISBN 80-7300-016-4